

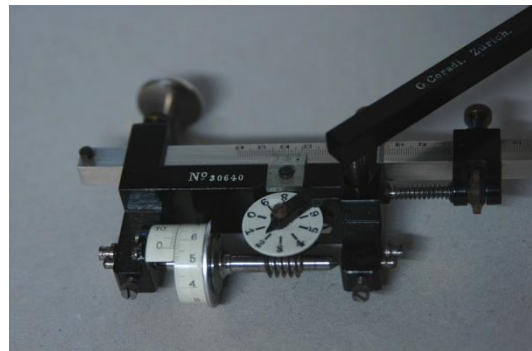
Planimètre polaire à compensation N°36

de l'Institut Mécano-Mathématique G. Coradi – Zürich

Francis Ziegeltrum

1. Introduction

L'intégration mécanique est possible depuis l'invention du planimètre polaire par Jakob Amsler (1823-1912) en 1854. Le planimètre est un instrument mécanique qui permet de mesurer l'aire délimitée par une courbe plane fermée. De nombreux modèles, plus ou moins précis ont été mis sur le marché par différents fabricants allemands et suisses. Le modèle présenté ici a été fabriqué en 1925 par l'Institut Mécano-Mathématique G. Coradi à Zürich.

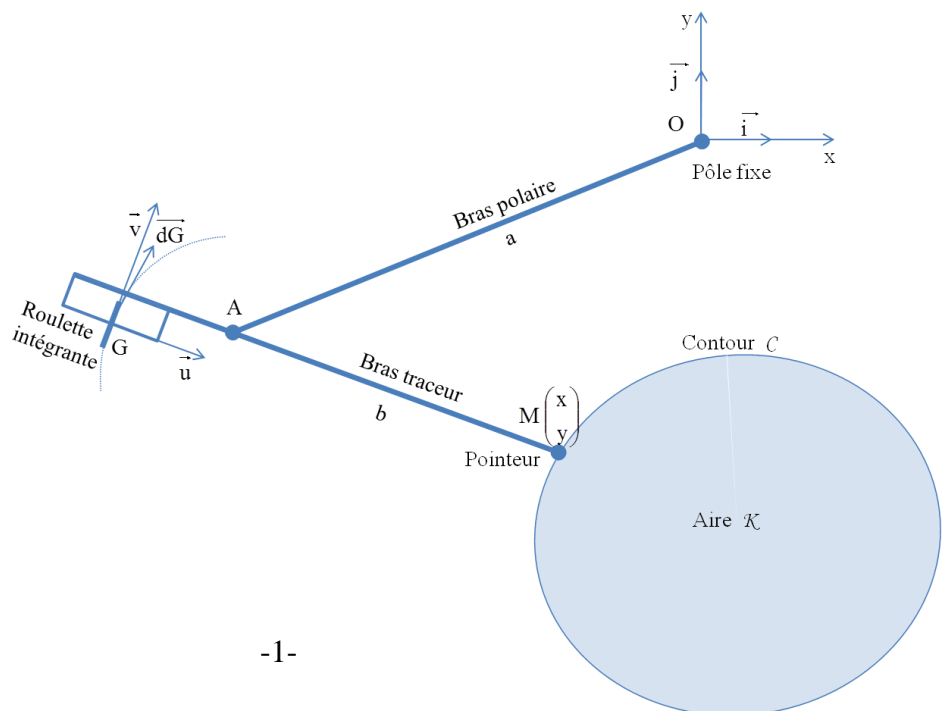


2. Fonctionnement

Un planimètre polaire est formé de deux bras, le polaire et le traceur, liés par une articulation A avec une roulette attachée au bras traceur pouvant tourner autour d'un axe parallèle à AM. L'extrémité O est fixe et l'extrémité M est mobile.

Quand le bras traceur est en mouvement de translation et se dirige de façon longitudinale, la roulette ne tourne pas. Quand il prend une autre direction, le nombre de tours que fait la roulette est proportionnel à la composante de translation qui est perpendiculaire à AM. Pour ce qui est du bras polaire, il agit comme un compas : l'extrémité O est fixe et l'extrémité A fait un mouvement circulaire.

Si le pointeur M parcourt une courbe fermée qui ne se croise pas elle-même, le nombre de tours que fait la roulette est proportionnel à l'aire du domaine délimité par la courbe parcourue.



3. Principe mathématique

Choix de l'emplacement de la roulette

Démontrons que la roulette placée en G mesure un déplacement proportionnel au déplacement de M. La roulette ne peut tourner que perpendiculairement au bras traceur. De ce fait elle n'enregistre que le projeté orthogonal du déplacement infinitésimal \overrightarrow{dG} sur le vecteur unitaire \vec{v} . Lorsque le pointeur M aura fait le tour du contour, la roulette aura donc fait un nombre de tours proportionnel à $\int_C \vec{v} \cdot \overrightarrow{dG}$

Or $G = M + \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$, les vecteurs unitaires \vec{u} et \vec{v} étant tels que $\vec{u} = \frac{1}{b} \overrightarrow{AM}$ et (\vec{u}, \vec{v}) une base orthonormée directe. α et β sont des constantes dépendant uniquement de la géométrie du planimètre.

On a donc $\vec{u} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$ et $\vec{v} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$ avec $\theta = \left(\vec{i}, \overrightarrow{AM} \right)$.

Soit $t \in [0, T]$ un paramétrage du contour C, G, θ et \overrightarrow{AM} sont alors des fonctions de t.

Donc $\frac{d\vec{u}}{dt} = -\theta' \sin \theta \vec{i} + \theta' \cos \theta \vec{j} = \theta' \vec{v}$ et $\frac{d\vec{v}}{dt} = -\theta' \cos \theta \vec{i} - \theta' \sin \theta \vec{j} = -\theta' \vec{u}$

Ainsi $\frac{d\overrightarrow{G}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{M}}{dt} + \alpha \frac{d\vec{u}}{dt} + \beta \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{M}}{dt} + \alpha \theta' \vec{v} - \beta \theta' \vec{u}$

Le nombre de tours de la roulette est donc proportionnel à

$$\begin{aligned} \int_C \vec{v} \cdot \overrightarrow{dG} &= \int_0^T \vec{v} \cdot \frac{d\overrightarrow{G}}{dt} dt = \int_0^T \vec{v} \cdot \left(\frac{d\overrightarrow{M}}{dt} + \alpha \theta' \vec{v} - \beta \theta' \vec{u} \right) dt = \int_0^T \left(\vec{v} \cdot \frac{d\overrightarrow{M}}{dt} + \alpha \theta' \right) dt \\ &= \int_C \vec{v} \cdot \overrightarrow{dM} + \alpha \int_0^T \theta' dt = \int_C \vec{v} \cdot \overrightarrow{dM} + \alpha \underbrace{(\theta(T) - \theta(0))}_{=0} = \int_C \vec{v} \cdot \overrightarrow{dM} \end{aligned}$$

Aire proportionnelle au nombre de tours de la roulette

Démontrons que le nombre de tours de la roulette intégrante est proportionnel à l'aire du contour fermé.

Comme $\vec{u} = \frac{1}{b} \overrightarrow{AM}$ on a $\vec{u} \left(\frac{x-x_A}{b}, \frac{y-y_A}{b} \right)$ et $\vec{v} \left(-\frac{y-y_A}{b}, \frac{x-x_A}{b} \right)$

D'où

$$\int_C \vec{v} \cdot \overrightarrow{dM} = \frac{1}{b} \int_C -(y - y_A) dx + (x - x_A) dy$$

Cette intégrale est de la forme $\int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ qui d'après de théorème de Green est égale à $\iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$

Donc $\int_C \vec{v} \cdot \overrightarrow{dM} = \frac{1}{b} \iint_K \left(\frac{\partial(x-x_A)}{\partial x} + \frac{\partial(y-y_A)}{\partial y} \right) dx dy = \frac{1}{b} \iint_K \left(2 - \frac{\partial x_A}{\partial x} - \frac{\partial y_A}{\partial y} \right) dx dy$

Puisque $x_A^2 + y_A^2 = a^2$ on a
$$\begin{cases} x_A \frac{\partial x_A}{\partial x} + y_A \frac{\partial y_A}{\partial x} = 0 & (1) \\ x_A \frac{\partial x_A}{\partial y} + y_A \frac{\partial y_A}{\partial y} = 0 & (2) \end{cases}$$

De même $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = b^2$ fait que
$$\begin{cases} (x - x_A) \frac{\partial(x-x_A)}{\partial x} + (y - y_A) \frac{\partial(y-y_A)}{\partial x} = 0 \\ (x - x_A) \frac{\partial(x-x_A)}{\partial y} + (y - y_A) \frac{\partial(y-y_A)}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Soit

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - x_A) \left(1 - \frac{\partial x_A}{\partial x}\right) - (y - y_A) \frac{\partial y_A}{\partial x} = 0 \\ -(x - x_A) \frac{\partial x_A}{\partial y} + (y - y_A) \left(1 - \frac{\partial y_A}{\partial y}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - x_A) \frac{\partial x_A}{\partial x} - (y - y_A) \frac{\partial y_A}{\partial x} = (x - x_A) & (3) \\ (x - x_A) \frac{\partial x_A}{\partial y} + (y - y_A) \frac{\partial y_A}{\partial y} = (y - y_A) & (4) \end{cases}$$

En prenant les équations (1) et (3) on obtient un système de Cramer :

$$\begin{cases} x_A \frac{\partial x_A}{\partial x} + y_A \frac{\partial y_A}{\partial x} = 0 \\ (x - x_A) \frac{\partial x_A}{\partial x} - (y - y_A) \frac{\partial y_A}{\partial x} = (x - x_A) \end{cases}$$

On en déduit :
$$\frac{\partial x_A}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_A \\ x-x_A & y-y_A \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x-x_A & y-y_A \end{vmatrix}} = \frac{x_A y_A - x y_A}{x_A y - x y_A} \quad (5)$$

Avec les équations (2) et (4) on obtient le système :

$$\begin{cases} x_A \frac{\partial x_A}{\partial y} + y_A \frac{\partial y_A}{\partial x} = 0 \\ (x - x_A) \frac{\partial x_A}{\partial y} - (y - y_A) \frac{\partial y_A}{\partial y} = (y - y_A) \end{cases}$$

D'où :
$$\frac{\partial y_A}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} x_A & 0 \\ x-x_A & y-y_A \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x-x_A & y-y_A \end{vmatrix}} = \frac{x_A y - x_A y_A}{x_A y - x y_A} \quad (6)$$

Finalement à partir de (5) et (6) on trouve que $\frac{\partial x_A}{\partial x} + \frac{\partial y_A}{\partial y} = 1$

Et donc $\int_C \vec{v} \cdot \overrightarrow{dM} = \frac{1}{b} \iint_K \left(2 - \frac{\partial x_A}{\partial x} - \frac{\partial y_A}{\partial y}\right) dx dy = \frac{1}{b} \iint_K (2 - 1) dx dy = \frac{1}{b} \mathcal{A}(K)$

L'aire $\mathcal{A}(K)$ est donc proportionnelle au nombre de tours de la roulette.

4. Utilisation

Réglage et lecture du planimètre

Le planimètre est livré avec le feuillet suivant :

Echelles	Position du vernier au bras mobil	Unité du vernier à la roulette	Nombre constant
1 : 1000	333.3	10 m ² 10 m/m ²	23679
1 : 500	266.5	2 " 8 "	23867
1 : 250	" " "	0,5 " " "	" " "
1 : 2500	213.0	40 " 6,4 "	" " "
1 : 125	" " "	10 " " "	" " "
1 : 4000	208.0	100 " 6,25 "	" " "
1 : 2000	166.3	20 " 5 "	" " "
1 : 3000	" " "	45 " " "	" " "
1 : 5000	132.9	100 " 4 "	" " "
1 : 1500	" " "	9 " " "	" " "

Zurich, le 12. März 1925. No. 30640. G. CORADI.

La première colonne donne un certain nombre d'échelles de plan

La deuxième colonne donne la position exacte de la roulette, à régler sur le bras traceur à l'aide du vernier en fonction de l'échelle du plan. L'intervalle des graduations est de 0,5mm, la roulette peut donc être positionnée à l'aide du vernier avec une précision de 0,05mm.

La troisième colonne donne la valeur d'une unité du vernier de la roulette : la circonférence de la roulette est divisée en 100 graduations et grâce au vernier on peut lire 1/10^e de graduation soit 1/1000^e de tour de roulette. Sachant que 10 unités du vernier=1 graduation de la roulette il est, dans la pratique, plus commode d'utiliser les valeurs du tableau suivant :

Echelles	Position du vernier au bras mobil	Surface sur le plan / graduation de la roulette	Nombre de graduation / cm ² de surface	Surface réelle / graduation de la roulette
1 : 1000	333.3	1cm ²	1	100 m ²
1 : 500	266.5	0.8cm ²	1.25	20 m ²
1 : 2500	213.0	0.64cm ²	1.5625	400 m ²
1 : 4000	208.0	0.625cm ²	1.6	1000 m ²
1 : 2000	166.3	0.5cm ²	2	200 m ²
1 : 5000	132.9	0.4cm ²	2.5	1000 m ²

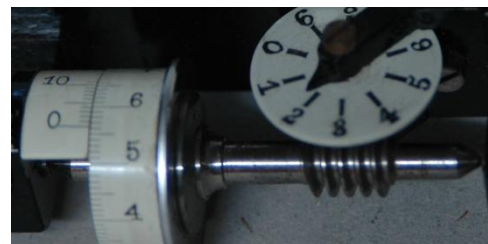
On remarque que plus le bras traceur est court moins il faut de surface pour une graduation, le planimètre devient donc plus sensible.

Quatrième colonne : Si le planimètre est placé à l'intérieur de la surface à mesurer, la surface balayée par le bras polaire n'est pas comptabilisé par la roulette. Les constantes indiquées dans cette colonne sont à rajouter.

Lecture du nombre de tour

Le cadran indique le nombre de tour entier, les graduations de la roulette donnent les 1/10^e et 1/100^e de tour et le vernier les 1/1000^e.

Ainsi, sur cette image peut-on lire que la roulette a effectué 1,563 tour ou que le nombre de graduation de la roulette est de 156,3.



Exemple de mesure de superficie



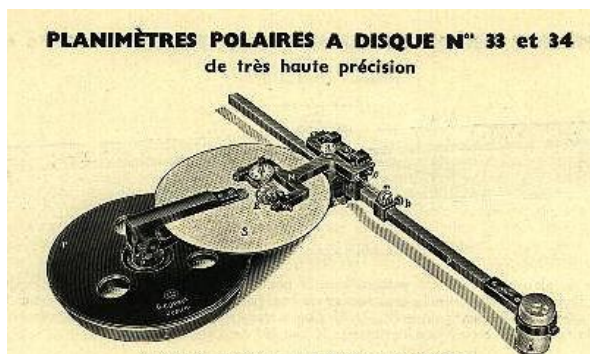
Soit à déterminer la superficie du Lac Léman à partir d'une carte à l'échelle 1:300000°

Je choisis de prendre une position du vernier au bras mobile de 333,3.

Pour augmenter la précision je fais trois mesures, dans le sens horaire. En faisant la moyenne des trois mesures je trouve 63,5 graduations soit, d'après le tableau, une surface sur la carte de 63,5 cm² soit $63,5 \times 300000^2 = 5,715 \cdot 10^{12}$ cm² = 571,5 km² sur le terrain. La superficie officielle est de 581,3 km² soit une différence de moins de 2% !

5. Conclusion

Le planimètre polaire est un très bel instrument de mesure dont la précision dépend beaucoup de la qualité de roulement de la roulette. C'est d'ailleurs pour cette raison que les fabricants de planimètre développèrent le planimètre polaire à disque, la roulette se déplaçant sur une surface de rugosité adaptée.



6. Bibliographie

- Das Planimeter Wolf-G. Blümich, version 20.03.2009
- [Le planimètre polaire Bruno Aebischer](#)
- Le site <http://linealis.org/article162.html>